PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

31 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind mit den induzierten Verknüpfungen Untergruppen, (unitäre) Unterringe bzw. Ideale?

$$0,\ \mathbb{Z},\ 2\mathbb{Z},\ \mathbb{N},\ 2\mathbb{N},\ \{\pm 1\},\ 18\mathbb{Z}+30\mathbb{Z},\ p\mathbb{Z},\ \{p^k,\ k\in\mathbb{N}\}\ (\text{mit } p\in\mathbb{Z}).$$

32 (a) Zeige, dass $R=\mathbb{Z}[\sqrt{5}]=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\sqrt{5}$ ein Ring aber kein Körper ist.

(b) Bestimme ein Element in R^* ungleich ± 1.

(c) Zeige, dass $K=\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\sqrt{-1}$ ein Körper ist.

33 (a) Zeige, dass $x+y$ und $x-y$ das gleiche Ideal wie x und y in $K[x,y]$ erzeugen.

(b) Zeige, dass $x+y^2$ und x^2-y das gleiche Ideal wie x und y in $K[[x,y]]$ erzeugen, nicht aber in $K[x,y]$.

(c) Schreibe $I=\langle xyz, yzw, zwx, wxy\rangle\subset K[x,y,z,w]$ als Durchschnitt von Primidealen und bestimme die Verschwindungsmenge $V(I)=\{a\in K^4,\ f(a)=0 \text{ für alle } f\in I\}$.

34 (a) Finde auf der Menge $R=K^{(\mathbb{N})}$ der endlichen Folgen in einem Körper K eine Ringstruktur, die R isomorph zum Polynomring $K[x]$ macht.

(b) Erweitere diese Aussage auf die Menge $S=K^{\mathbb{N}}$ aller Folgen in K, bzw. auf die Menge $T=K^{(\mathbb{Z})}=\{(a_s)_{s\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},K),\ a_s=0 \text{ für fast alle } s\}$, wobei $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z},K)$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach K bezeichnet.

(c) Funktioniert diese Erweiterung auch für $K^{\mathbb{Z}}$?

35^s Beweise die folgenden Aussagen und illustriere jeweils an einem signifikanten Beispiel.

(a) Summe und Durchschnitt von (beliebig vielen) Idealen ist wieder ein Ideal.

(b) Ein Ideal $I\subset R$ ist prim genau dann, wenn R/I Integritätsbereich ist.

(c) Ein Ideal $I\subset R$ ist maximal genau dann, wenn R/I Körper ist.

(d) Ein Ideal $I\subset R$ ist radikal genau dann, wenn R/I reduziert ist, das heisst, wenn R/I keine nilpotenten Elemente ausser 0 enthält.

36* (a) Finde ein Primideal $I\in\mathbb{C}[x,y]$, dessen Erweiterung auf $\mathbb{C}[[x,y]]$ nicht prim ist.

(b) Beschreibe einen Ring, in dem nicht jedes Ideal endlich erzeugt ist.

(c) Der Ring der formalen Potenzreihen $K[[x_1,\dots,x_n]]$ besitzt genau ein maximales Ideal m, und dieses kann von n Elementen erzeugt werden.

(d) Im Faktorring $K[[x,y]]/(x^2-y^3)$ kann das maximale Ideal $(\overline{x},\overline{y})$ nicht von einem Element erzeugt werden.